

XIII. KOMPLEXNÍ ČÍSLA

§1. Komplexní čísla, algebraický tvar komplexního čísla

Pozn.: Množinu všech komplexních čísel označíme C .

Def.: Komplexním číslem $z \in C$ nazýváme každou uspořádanou dvojici $z = (x, y)$ reálných čísel, tj. kartézského čtverce $R \times R = R^2 = C$, na kterém jsou definovány rovnost a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení takto:

1. Rovnost komplexních čísel $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$\text{V opačném případě } z_1 \neq z_2 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$$

2. Součet komplexních čísel $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

3. Rozdíl komplexních čísel $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$:

Rozdílem rozumíme komplexní číslo z , pro které platí

$$z_1 = z_2 + z, \text{ zapisujeme}$$

$$z = z_1 - z_2$$

4. Součin komplexních čísel $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ definujeme takto:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

5. Podíl komplexních čísel $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$; $z_2 \neq (0, 0)$:

Podílem značíme komplexní číslo z , pro které platí:

$$z_1 = z_2 \cdot z, \text{ zapisujeme}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

V.1.1.: Necht' $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in C$. Pak platí:

$$\text{a) } z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$\text{b) } z_2 \neq (0, 0) : \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

[Dk.:]

V.1.2.: Množina C má následující vlastnosti:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in C : 1. z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$2. (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$3. \exists o \in C : \forall z \in C : z + o = o + z = z \quad o = (0, 0)$$

$$4. \forall z \in C : \exists z' \in C : z + z' = z' + z = o \quad (z' \text{ je číslo opačné k číslu } z)$$

$$5. z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$6. (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$7. \exists e \in \mathbf{C} : \forall z \in \mathbf{C} : z \cdot e = e \cdot z = z \quad e = (1, 0)$$

$$8. \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \exists z^* \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

$$z^* \cdot z = z \cdot z^* = e \quad (z^* \text{ je číslo převrácené k číslu } z)$$

$$9. (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

[Dk.:]

Pozn.:

- a) Vlastnosti 1-4 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbf{C}$ s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu $(\mathbf{C}, \oplus)$
- b) Vlastnosti 5-8 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ s operací $\otimes$ tvoří komutativní grupu $(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \otimes)$
- c) Vlastnosti 1-9 z věty V.1.2. zajišťují, že $\mathbf{C}$ s operacemi $\oplus, \otimes$ tvoří komutativní těleso (pole) $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes)$

Pozn.!: Souvislost množin $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$:

Ztotožníme $\mathbf{R}$ s jistou podmnožinou množiny $\mathbf{C}$.

Zobrazení $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ definujeme takto: $\forall x \in \mathbf{R} : \varphi(x) = (x, 0)$

Zobrazení φ je injektivní (tedy prosté), ale není bijektivní.

Pro $x, y \in \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:

$$1) \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \text{ tedy } (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$2) \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y) \text{ tedy } (x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (xy, 0)$$

$\Rightarrow \varphi$ zachovává operace $\oplus, \otimes$. Je to izomorfní zobrazení $\mathbf{R}$ do $\mathbf{C}$.

Lze tedy každé komplexní číslo $(x, 0)$ ztotožnit s reálným číslem x .

Pozn.: Konvence

Komplexní číslo $(0, 1)$ označme i . $i = (0, 1)$

Přitom platí: $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$

$$(x, y) = x + iy$$

$$\underline{\underline{i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1}}$$

Def.: Necht' $z \in \mathbf{C}, z = (x, y)$.

Zápis čísla z ve tvaru $z = x + iy$ nazýváme algebraickým tvarem komplexního čísla z .

Číslo $x \in \mathbf{R}$ nazýváme reálnou částí a číslo $y \in \mathbf{R}$ nazýváme částí imaginární, číslo

$i = (0, 1)$ nazýváme imaginární jednotkou.

Zapisujeme $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Čísla $z = x + iy$, kde $y \neq 0$, nazýváme imaginárními, čísla $z = iy$, kde $y \neq 0$, nazýváme ryze imaginárními.

Pozn.: Množina komplexních čísel je tedy sjednocením množiny čísel reálných a čísel imaginárních.

Pozn.: Při počítání s komplexními čísly v algebraickém tvaru lze tato čísla formálně chápat jako mnohočleny a využívat faktu, že $i^2 = -1$.

Pozn.: Zřejmě platí: $\forall n \in \mathbf{Z} : i^{4n} = 1 \quad i^{4n+2} = -1$
 $i^{4n+1} = i \quad i^{4n+3} = -i$

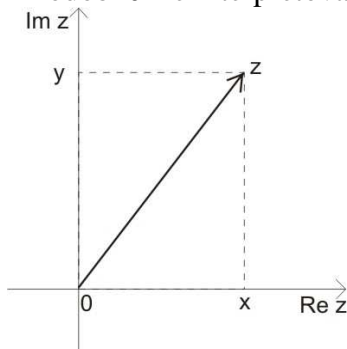
§2. Gaussova rovina, goniometrický tvar komplexního čísla

Pozn.: Protože množina $\mathbf{C}$ je definována jako množina uspořádaných dvojic $\mathbf{R}$ čísel, lze každé komplexní číslo $z = (x, y)$ zobrazit v rovině s kartézskou soustavou souřadnic a ztotožnit s bodem $z[x, y]$.

Reálná čísla leží na ose x (osa x se nazývá reálná osa).

Ryze imaginární čísla $z = yi, y \neq 0$ leží na ose y (osa y se nazývá imaginární osa).

Rovina s reálnou a imaginární osou se nazývá Gaussova rovina a v ní zobrazujeme komplexní čísla. Podobně lze interpretovat komplexní čísla jako vektory s pevným počátečním bodem.



Def.: Necht' $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Číslo $\bar{z} = x - iy \in \mathbf{C}$ nazýváme komplexně sdruženým číslem k číslu z .

Číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbf{R}$ nazýváme absolutní hodnotou komplexního čísla z .

Komplexní číslo z s vlastností $|z| = 1$ nazýváme komplexní jednotkou.

Pozn.:

- Čísla z a $\bar{z}$ jsou osově souměrná podle reálné osy (osy x)
- Číslo $|z|$ vyjadřuje vzdálenost bodu z od počátku souřadné soustavy, a tedy délku polohového vektoru bodu z .
- Množinu všech komplexních jednotek označíme $\mathbf{U}$.
- Protože obrazem množiny komplexních čísel se stejnou nenulovou absolutní hodnotou je kružnice se středem v počátku souřadné soustavy, je obrazem množiny $\mathbf{U}$ jednotková kružnice se středem v počátku.

V.2.1.: Pro každá dvě komplexně sdružená čísla
$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ \bar{z} &= x - yi \end{aligned}$$
 platí:

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $z + \bar{z} = 2x$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

V.2.2.: Pro absolutní hodnoty libovolných komplexních čísel $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí:

$$1) |z| \geq 0, \text{ přičemž } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$2) |z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$3) |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$4) |z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2|$$

$$5) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$6) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$7) \operatorname{Re} z \leq |z|, \operatorname{Im} z \leq |z|$$

Pozn.: Všechny vztahy platící pro reálná čísla nelze mechanicky převést do množiny komplexních čísel.

Např. $|z|^2 \neq z^2$

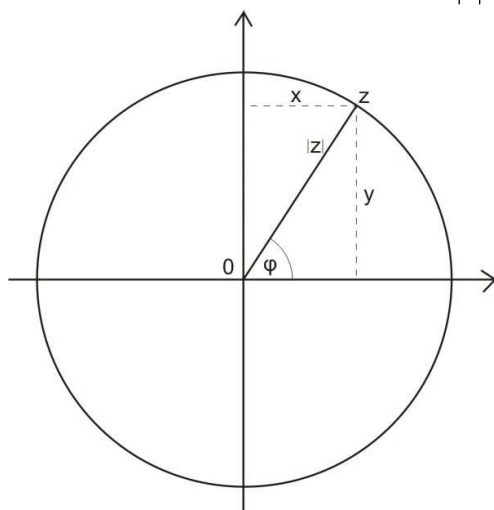
Pozn.: Na rozdíl od množiny reálných čísel není množina komplexních čísel uspořádaná, tedy komplexní čísla nelze srovnávat podle velikosti.

Def.: Necht' $z = x + iy \in \mathbb{C}; z \neq 0$. Argumentem komplexního čísla nazýváme orientovaný úhel φ , který svírá kladná poloosa reálné osy s polohovým vektorem bodu z .

Pozn.: Každé nenulové číslo z má nekonečně mnoho argumentů, přitom každé 2 z nich se liší o $k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Je-li $\varphi \in (0; 2\pi)$, pak jej nazýváme hlavní argument komplexního čísla z , je jediný.

V.2.3.: Každé komplexní číslo $z = x + iy; z \neq 0$ lze zapsat ve tvaru $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $|z|$ je absolutní hodnota z a φ je argument z , přičemž platí: $\cos \varphi = \frac{x}{|z|}; \sin \varphi = \frac{y}{|z|}$.



[Dk.!:]

Def.: Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Pak goniometrickým tvarem tohoto čísla nazýváme zápis čísla ve tvaru

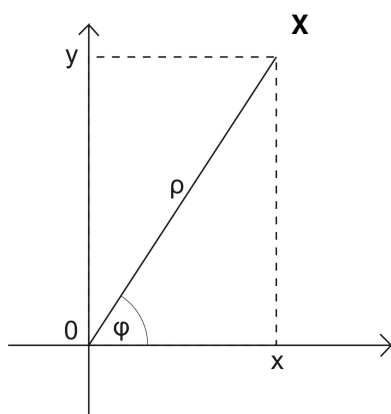
$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ kde } |z| \text{ je absolutní hodnota } z \text{ a } \varphi \text{ je argument } z, \text{ přičemž } \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \text{ a}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Pozn.: Tedy každé komplexní číslo $z, z \neq 0$ lze zapsat uspořádanou dvojicí $z = (|z|, \varphi)$, někdy též

$z = (\varphi, |z|)$. Čísla $|z|$ a φ jsou polárními souřadnicemi komplexního čísla z .

Druhy souřadnic bodu X v rovině E_2 :



$X[x, y] \dots$ kartézské souřadnice

$X[\rho, \varphi] \dots$ polární souřadnice

ρ je vzdálenost daného bodu od počátku soustavy souřadnic

Pozn.: Je-li $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplexní jednotka s argumentem φ , je její goniometrický tvar $u = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

V.2.4.: Necht' $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

Pak platí: 1. $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

[Dk.:]

V.2.5.: Moivreova věta

Necht' máme nenulové komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), n \in \mathbb{N}$, pak platí:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

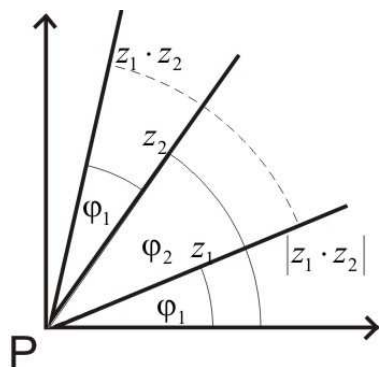
[Dk.:]

Pozn.: Moivreova věta platí i pro celé exponenty.

Pozn.: Součet a rozdíl, součin a podíl komplexních čísel v Gaussově rovině

Součet a rozdíl jako sčítání a odčítání vektorů.

Součin $z_1 \cdot z_2$ (podíl $\frac{z_1}{z_2}$): 1. zobrazíme z_1 ve stejnolehlosti $H_{P,|z_2|}(H_{P,|\frac{1}{z_2}|})$:



$$\text{získáme } |z_1 \cdot z_2| = H_{P,|z_2|}(z_1) \quad \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = H_{P,|\frac{1}{z_2}|}(z_1) \right)$$

2. zobrazíme $|z_1 \cdot z_2| \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \right)$ v rotaci $R_{P,\arg z_2}(R_{P,-\arg z_2})$ (rotace se středem

P a argumentem $z_2(-z_2)$)

získáme $z_1 \cdot z_2 = R_{P,\arg z_2} \circ H_{P,|z_2|}(z_1)$

$$\left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = R_{P,-\arg z_2} \circ H_{P,|\frac{1}{z_2}|}(z_1) \right)$$